# Séance 3 - Microéconomie 2 (Exercice 3.2)

Ibirénoyé H. R. Sodjahin (Bureau 102, BATEG)
sodjahii@univ-grenoble-alpes.fr

12 Février 2024

Soit une firme concurrentielle produisant un seul modèle de téléphone à l'aide de matières premières (plastique, métaux rares) dont la technologie de production est donnée par la fonction suivante :

$$y = 2x_1^{1/3}x_2^{1/3}$$

et le prix des facteurs de production sont respectivement donnés par $w_1 = 1$ et $w_2 = 3$. On note $p$ le prix unitaire du bien produit.

Q 1) Déterminer la fonction de coût total de la firme

# Q 1) Fonction de coût total de la firme

## Q 1) Fonction de coût total de la firme

- Demande conditionnelle en facteurs de production

# Q 1) Fonction de coût total de la firme

- Demande conditionnelle en facteurs de production
  - Coût total obtenu en valorisant avec $w_1 = 1$ et $w_2 = 3$.

## Q 1) Fonction de coût total de la firme

- Demande conditionnelle en facteurs de production
  - Coût total obtenu en valorisant avec $w_1 = 1$ et $w_2 = 3$.
- Problème du producteur : trouver $x_1^*$ et $x_2^*$ tels que

$$(x_1^*, x_2^*) \in \underset{(x_1, x_2)}{\arg\min} \{w_1 x_1 + w_2 x_2\}$$

sous la contrainte : $y = f(x_1, x_2) = 2x_1^{1/3} x_2^{1/3}$

## Q 1) Fonction de coût total de la firme

- Demande conditionnelle en facteurs de production
  - Coût total obtenu en valorisant avec $w_1 = 1$ et $w_2 = 3$.
- Problème du producteur : trouver $x_1^*$ et $x_2^*$ tels que

$$(x_1^*, x_2^*) \in \underset{(x_1,x_2)}{\arg\min} \{w_1 x_1 + w_2 x_2\}$$

$$\text{sous la contrainte : } y = f(x_1, x_2) = 2x_1^{1/3} x_2^{1/3}$$

  - $TMST_{2,1}(x_1, x_2) = \frac{\frac{2}{3} x_1^{-2/3} x_2^{1/3}}{\frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-2/3}} = \frac{x_2}{x_1}$

## Q 1) Fonction de coût total de la firme

- Demande conditionnelle en facteurs de production
  - Coût total obtenu en valorisant avec $w_1 = 1$ et $w_2 = 3$.
- Problème du producteur : trouver $x_1^*$ et $x_2^*$ tels que

$$(x_1^*, x_2^*) \in \underset{(x_1,x_2)}{\arg\min} \{w_1 x_1 + w_2 x_2\}$$

$$\text{sous la contrainte : } y = f(x_1, x_2) = 2x_1^{1/3} x_2^{1/3}$$

  - $TMST_{2,1}(x_1, x_2) = \frac{\frac{2}{3} x_1^{-2/3} x_2^{1/3}}{\frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-2/3}} = \frac{x_2}{x_1}$
  - Condition d'optimalité : $\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow x_1 = 3x_2$

## Q 1) Fonction de coût total de la firme

- Demande conditionnelle en facteurs de production
  - Coût total obtenu en valorisant avec $w_1 = 1$ et $w_2 = 3$.
- Problème du producteur : trouver $x_1^*$ et $x_2^*$ tels que

$$(x_1^*, x_2^*) \in \underset{(x_1,x_2)}{\arg\min} \{w_1 x_1 + w_2 x_2\}$$

$$\text{sous la contrainte : } y = f(x_1, x_2) = 2x_1^{1/3} x_2^{1/3}$$

- $TMST_{2,1}(x_1, x_2) = \frac{\frac{2}{3} x_1^{-2/3} x_2^{1/3}}{\frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-2/3}} = \frac{x_2}{x_1}$
- Condition d'optimalité : $\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{3} \iff x_1 = 3x_2$
- Contrainte : $y = 2x_1^{1/3} x_2^{1/3} \iff y = 2(3x_2)^{1/3} x_2^{1/3}$, soit $y = 2 \times 3^{1/3} x_2^{2/3}$

## Q 1) Fonction de coût total de la firme

- Demande conditionnelle en facteurs de production
  - Coût total obtenu en valorisant avec $w_1 = 1$ et $w_2 = 3$.
- Problème du producteur : trouver $x_1^*$ et $x_2^*$ tels que

$$(x_1^*, x_2^*) \in \underset{(x_1,x_2)}{\arg\min} \{w_1 x_1 + w_2 x_2\}$$

$$\text{sous la contrainte : } y = f(x_1, x_2) = 2x_1^{1/3} x_2^{1/3}$$

- $TMST_{2,1}(x_1, x_2) = \frac{\frac{2}{3} x_1^{-2/3} x_2^{1/3}}{\frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-2/3}} = \frac{x_2}{x_1}$
- Condition d'optimalité : $\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{3} \iff x_1 = 3x_2$
- Contrainte : $y = 2x_1^{1/3} x_2^{1/3} \iff y = 2(3x_2)^{1/3} x_2^{1/3}$, soit $y = 2 \times 3^{1/3} x_2^{2/3}$
  - On déduit $x_2^{2/3} = \frac{y}{2 \times 3^{1/3}} \iff x_2^* = \frac{y^{3/2}}{2^{3/2} \times 3^{1/2}}$. Donc $x_1^* = \frac{3^{1/2} y^{3/2}}{2^{3/2}}$

# Q 1) Fonction de coût total de la firme

## Q 1) Fonction de coût total de la firme

- Demande conditionnelle en facteurs de production :
$\left(x_1^* = \frac{3^{1/2} y^{3/2}}{2^{3/2}};\ x_2^* = \frac{y^{3/2}}{2^{3/2} \times 3^{1/2}}\right)$

# Q 1) Fonction de coût total de la firme

- Demande conditionnelle en facteurs de production :
  $\left(x_1^* = \frac{3^{1/2}y^{3/2}}{2^{3/2}};\ x_2^* = \frac{y^{3/2}}{2^{3/2}\times 3^{1/2}}\right)$
- Coût total : $C(y) = w_1 x_1^* + w_2 x_2^*$, avec $w_1 = 1$ et $w_2 = 3$, soit

$$C(y) = \frac{3^{1/2}y^{3/2}}{2^{3/2}} + \underbrace{\left(3^{1/2}\times 3^{1/2}\right)}_{3} \times \frac{y^{3/2}}{2^{3/2}\times 3^{1/2}}$$
$$= \frac{3^{1/2}y^{3/2}}{2^{3/2}} + \frac{3^{1/2}y^{3/2}}{2^{3/2}} = 2\times\left(\frac{3^{1/2}y^{3/2}}{2^{3/2}}\right) = 2\times\left(\frac{3^{1/2}y^{3/2}}{2\times 2^{1/2}}\right)$$
$$= \frac{3^{1/2}y^{3/2}}{2^{1/2}} = \frac{3^{1/2}}{2^{1/2}}y^{3/2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{3/2}$$

- $C(y) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{3/2}$

## Q 2) Fonction d'offre de long terme de la firme

- Coût total : $C(y) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{3/2}$

## Q 2) Fonction d'offre de long terme de la firme

- Coût total : $C(y) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{3/2}$
  - Coût marginal : $Cm(y) = \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{1/2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} y^{1/2}$

## Q 2) Fonction d'offre de long terme de la firme

- Coût total : $C(y) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{3/2}$
  - Coût marginal : $Cm(y) = \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{1/2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} y^{1/2}$
  - Coût moyen : $CM(y) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{1/2}$
- Profit : $\pi(y, p) = p \cdot y - \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{3/2}$

## Q 2) Fonction d'offre de long terme de la firme

- Coût total : $C(y) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{3/2}$
  - Coût marginal : $Cm(y) = \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{1/2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} y^{1/2}$
  - Coût moyen : $CM(y) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{1/2}$
- Profit : $\pi(y,p) = p \cdot y - \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{3/2}$
- Condition d'optimalité du problème : $\max_y \{\pi(y,p)\}$

## Q 2) Fonction d'offre de long terme de la firme

- Coût total : $C(y) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{3/2}$
  - Coût marginal : $Cm(y) = \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{1/2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} y^{1/2}$
  - Coût moyen : $CM(y) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{1/2}$
- Profit : $\pi(y,p) = p \cdot y - \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{3/2}$
- Condition d'optimalité du problème : $\max_y \{\pi(y,p)\}$
  - $p = Cm(y) \Longleftrightarrow p = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} y^{1/2}$, soit $y^{1/2} = \frac{p}{\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}} \Longleftrightarrow y(p) = \frac{p^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}$
  - $y(p) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 p^2$

# Q 2) Fonction d'offre de long terme de la firme

- Coût total : $C(y) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{3/2}$
  - Coût marginal : $Cm(y) = \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{1/2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} y^{1/2}$
  - Coût moyen : $CM(y) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{1/2}$
- Profit : $\pi(y,p) = p \cdot y - \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{3/2}$
- Condition d'optimalité du problème : $\max_y \{\pi(y,p)\}$
  - $p = Cm(y) \iff p = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} y^{1/2}$, soit $y^{1/2} = \frac{p}{\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}} \iff y(p) = \frac{p^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}$
  - $y(p) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 p^2$
- La fonction d'offre de long terme depend du seuil de rentabilité
  - $Cm(y_r) = Cm(y_r) \iff \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} y_r^{1/2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y_r^{1/2}$, soit $y_r = 0$

## Q 2) Fonction d'offre de long terme de la firme

- Coût total : $C(y) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{3/2}$
  - Coût marginal : $Cm(y) = \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{1/2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} y^{1/2}$
  - Coût moyen : $CM(y) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{1/2}$
- Profit : $\pi(y,p) = p \cdot y - \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y^{3/2}$
- Condition d'optimalité du problème : $\max_y \{\pi(y,p)\}$
  - $p = Cm(y) \Longleftrightarrow p = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} y^{1/2}$, soit $y^{1/2} = \frac{p}{\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}} \Longleftrightarrow y(p) = \frac{p^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}$
  - $y(p) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 p^2$
- La fonction d'offre de long terme depend du seuil de rentabilité
  - $Cm(y_r) = Cm(y_r) \Longleftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} y_r^{1/2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} y_r^{1/2}$, soit $y_r = 0$
  - $p_r = Cm(0) = CM(0) = 0$

## Q 2) Fonction d'offre de long terme de la firme

- La fonction d'offre de long terme est

$$y(p) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^3 p^2 & \text{si } p \geq p_r = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Q 3) Demande en facteurs de production en fonction du prix

- Demande conditionnelle en facteurs de production :
  $\left(x_1^*(y) = \frac{3^{1/2}y^{3/2}}{2^{3/2}};\ x_2^*(y) = \frac{y^{3/2}}{2^{3/2}\times 3^{1/2}}\right)$
- Fonction d'offre

$$y(p) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^3 p^2 & \text{si } p \geq p_r = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Q 3) Demande en facteurs de production en fonction du prix

- Demande conditionnelle en facteurs de production :
$\left(x_1^*(y) = \frac{3^{1/2} y^{3/2}}{2^{3/2}};\ x_2^*(y) = \frac{y^{3/2}}{2^{3/2} \times 3^{1/2}}\right)$
- Fonction d'offre

$$y(p) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^3 p^2 & \text{si } p \geq p_r = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $x_1^*(p) = \frac{3^{1/2}}{2^{3/2}} \left( \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^3 p^2}_{y(p)} \right)^{3/2} = \frac{3^{1/2} \times 2^{9/2}}{2^{3/2} \times 3^{9/2}} p^3 = \frac{3^{1/2} \times 2^{3/2} \times 2^{6/2}}{3^{1/2} \times 3^{8/2} \times 2^{3/2}} p^3 = \frac{2^3}{3^4} p^3$

## Q 3) Demande en facteurs de production en fonction du prix

- $x_1^*(p) = \frac{2^3}{3^4} p^3 = \frac{8}{81} p^3$

## Q 3) Demande en facteurs de production en fonction du prix

- $x_1^*(p) = \frac{2^3}{3^4} p^3 = \frac{8}{81} p^3$
- $x_2^*(p) = \frac{1}{3^{1/2} \times 2^{3/2}} \left( \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^3 p^2}_{y(p)} \right)^{3/2} = \frac{2^{9/2}}{2^{3/2} \times 3^{10/2}} p^3 = \frac{2^{3/2} \times 2^{6/2}}{2^{3/2} \times 3^{10/2}} p^3 = \frac{2^3}{3^5} p^3$
- $\left( x_1^*(p) = \frac{8}{81} p^3;\ x_2^*(p) = \frac{8}{243} p^3 \right)$

## Q 4) Demande en facteurs de production par maximisation du profit

- Ce problème équivalent à celui de la minimisation du coût sous contrainte de la technologie

$$(x_1^*, x_2^*) \in \underset{(x_1,x_2)}{\arg\max} \{py - w_1 x_1 - w_2 x_2\}$$

sous la contrainte : $y = 2x_1^{1/3} x_2^{1/3}$

- $\iff (x_1^*, x_2^*) \in \arg\max_{(x_1,x_2)} \{2px_1^{1/3} x_2^{1/3} - w_1 x_1 - w_2 x_2\}$
- On pose $g(x_1, x_2) = 2px_1^{1/3} x_2^{1/3} - w_1 x_1 - w_2 x_2$
- Conditions d'optimalité

$$\begin{cases} \frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_1} & = 0 \\ \frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_2} & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2}{3} p x_1^{-2/3} x_2^{1/3} - w_1 & = 0 \\ \frac{2}{3} p x_1^{1/3} x_2^{-2/3} - w_2 & = 0 \end{cases}$$

# Q 4) Demande en facteurs de production par maximisation du profit

$$\begin{cases} \frac{2}{3}px_1^{-2/3}x_2^{1/3} - w_1 & = 0 \\ \frac{2}{3}px_1^{1/3}x_2^{-2/3} - w_2 & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}p\frac{x_2^{1/3}}{x_1^{1/3} \cdot x_1^{1/3}} & = w_1 \quad \textbf{(1)} \\ \frac{2}{3}p\frac{x_1^{1/3}}{x_2^{1/3} \cdot x_2^{1/3}} & = w_2 \quad \textbf{(2)} \end{cases}$$

- Comme on veut exprimer $x_1(p)$ et $x_2(p)$, on **n'a pas** intérêt à faire $\frac{\textbf{(1)}}{\textbf{(2)}}$

# Q 4) Demande en facteurs de production par maximisation du profit

$$\begin{cases} \frac{2}{3}px_1^{-2/3}x_2^{1/3} - w_1 & = 0 \\ \frac{2}{3}px_1^{1/3}x_2^{-2/3} - w_2 & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}p\frac{x_2^{1/3}}{x_1^{1/3}\cdot x_1^{1/3}} & = w_1 \quad \textbf{(1)} \\ \frac{2}{3}p\frac{x_1^{1/3}}{x_2^{1/3}\cdot x_2^{1/3}} & = w_2 \quad \textbf{(2)} \end{cases}$$

- Comme on veut exprimer $x_1(p)$ et $x_2(p)$, on **n'a pas** intérêt à faire $\frac{\textbf{(1)}}{\textbf{(2)}}$
  - Cela ferait disparaitre $p$ de nos conditions d'optimalité

# Q 4) Demande en facteurs de production par maximisation du profit

$$\begin{cases} \frac{2}{3}px_1^{-2/3}x_2^{1/3} - w_1 & = 0 \\ \frac{2}{3}px_1^{1/3}x_2^{-2/3} - w_2 & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}p\frac{x_2^{1/3}}{x_1^{1/3} \cdot x_1^{1/3}} & = w_1 \quad \textbf{(1)} \\ \frac{2}{3}p\frac{x_1^{1/3}}{x_2^{1/3} \cdot x_2^{1/3}} & = w_2 \quad \textbf{(2)} \end{cases}$$

- Comme on veut exprimer $x_1(p)$ et $x_2(p)$, on **n'a pas** intérêt à faire $\frac{\textbf{(1)}}{\textbf{(2)}}$
  - Cela ferait disparaitre $p$ de nos conditions d'optimalité
- Je choisis d'exprimer $x_1(p, x_2)$ avec **(2)** et $x_2(p, x_1)$ avec **(1)**

$$\textbf{(1)} : \frac{2}{3}p\frac{x_2^{1/3}}{x_1^{1/3} \cdot x_1^{1/3}} = w_1 \Longleftrightarrow 2p \cdot x_2^{1/3} = 3w_1 \cdot x_1^{1/3} \cdot x_1^{1/3}$$

$$\Longleftrightarrow x_2^{1/3} = \frac{3}{2p}w_1 \cdot x_1^{1/3} \cdot x_1^{1/3} \quad \textbf{(3)}$$

# Q 4) Demande en facteurs de production par maximisation du profit

On vient de trouver $x_2^{1/3} = \frac{3}{2p} w_1 \cdot x_1^{1/3} \cdot x_1^{1/3}$ **(3)** et on rappelle

$$\begin{cases} \frac{2}{3} p \frac{x_2^{1/3}}{x_1^{1/3} \cdot x_1^{1/3}} & = w_1 \quad \textbf{(1)} \\ \frac{2}{3} p \frac{x_1^{1/3}}{x_2^{1/3} \cdot x_2^{1/3}} & = w_2 \quad \textbf{(2)} \end{cases}$$

- On traite maintenant l'équation **(2)** :

$$\begin{aligned} \textbf{(2)} : \frac{2}{3} p \frac{x_1^{1/3}}{x_2^{1/3} \cdot x_2^{1/3}} = w_2 &\Longleftrightarrow \frac{2}{3} p \cdot \frac{x_1^{1/3}}{x_2^{1/3} \cdot x_2^{1/3}} = w_2 \\ &\Longleftrightarrow 2p \cdot x_1^{1/3} = 3 w_2 \cdot x_2^{1/3} \cdot x_2^{1/3} \\ &\Longleftrightarrow x_1^{1/3} = \frac{3}{2p} w_2 \cdot x_2^{1/3} \cdot x_2^{1/3} \quad \textbf{(4)} \end{aligned}$$

# Q 4) Demande en facteurs de production par maximisation du profit

$$\begin{cases} x_2^{1/3} & = \frac{3}{2p} w_1 \cdot x_1^{1/3} \cdot x_1^{1/3} \quad \textbf{(3)} \\ x_1^{1/3} & = \frac{3}{2p} w_2 \cdot x_2^{1/3} \cdot x_2^{1/3} \quad \textbf{(4)} \end{cases}$$

- **(4)** dans **(3)** donne :

$$\begin{aligned} x_2^{1/3} = \frac{3}{2p} w_1 \cdot x_1^{1/3} \cdot x_1^{1/3} &\Longleftrightarrow x_2^{1/3} = \frac{3}{2p} w_1 \left( \frac{3}{2p} w_2 \cdot x_2^{1/3} \cdot x_2^{1/3} \right)^2 \\ &\Longleftrightarrow x_2^{1/3} = \frac{3^3}{2^3 \cdot p^3} w_1 \cdot w_2^2 \left( x_2^{1/3} \underbrace{x_2^{1/3} x_2^{1/3} x_2^{1/3}}_{x_2} \right) \\ &\Longleftrightarrow 1 = \frac{3^3}{2^3 \cdot p^3} w_1 \cdot w_2^2 \left( x_2 \right) \quad \textbf{(5)} \end{aligned}$$

# Q 4) Demande en facteurs de production par maximisation du profit

$$\textbf{(5)} : \frac{3^3}{2^3 \cdot p^3} w_1 \cdot w_2^2 (x_2) = 1 \iff 3^3 \cdot w_1 \cdot w_2^2 x_2 = 2^3 p^3$$

$$\iff x_2 = \frac{2^3}{3^3 \cdot w_1 \cdot w_2^2} p^3$$

- A partir de **(4)** : $x_1^{1/3} = \frac{3}{2p} w_2 \cdot x_2^{1/3} \cdot x_2^{1/3}$, on a :

$$x_1^{1/3} = \frac{3}{2p} w_2 \cdot x_2^{1/3} \cdot x_2^{1/3} \iff x_1 = \left(\frac{3}{2p}\right)^3 w_2^3 \cdot x_2 \cdot x_2$$

$$\iff x_1 = \left(\frac{3}{2p}\right)^3 w_2^3 \cdot x_2^2$$

# Q 4) Demande en facteurs de production par maximisation du profit

$$\begin{cases} x_2 &= \frac{2^3}{3^3 \cdot w_1 \cdot w_2^2} p^3 \\ x_1 &= \left(\frac{3}{2p}\right)^3 w_2^3 \cdot x_2^2 \end{cases}$$

On remplace $x_2$ dans l'expression de $x_1$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{3}{2p}\right)^3 w_2^3 \left(\frac{2^3}{3^3 \cdot w_1 \cdot w_2^2} p^3\right)^2 \\ &= \frac{3^3 \cdot w_2^3 \cdot 2^6 \cdot p^6}{2^3 \cdot p^3 \cdot 3^6 \cdot w_1^2 \cdot w_2^4} = \frac{3^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot w_2^3 \cdot p^3 \cdot p^3}{(3^3 \cdot 3^3) \cdot 2^3 \cdot (w_2^3 \cdot w_2) \cdot w_1^2 \cdot p^3} \\ &= \frac{2^3}{3^3 \cdot w_2 \cdot w_1^2} p^3 \end{aligned}$$

## Q 4) Demande en facteurs de production par maximisation du profit

- Finalement, on a

$$\begin{cases} x_2^* &= \dfrac{2^3}{3^3 \cdot w_1 \cdot w_2^2} p^3 \\ x_1^* &= \dfrac{2^3}{3^3 \cdot w_1^2 \cdot w_2} p^3 \end{cases}$$

- Avec $w_1 = 1$ et $w_2 = 3$, on a en définitive :

$$\begin{cases} x_2^* &= \dfrac{2^3}{3^3 \times 1 \times 3^2} p^3 \\ x_1^* &= \dfrac{2^3}{3^3 \times 1^2 \times 3} p^3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_2^* &= \dfrac{2^3}{3^5} p^3 = \dfrac{8}{243} p^3 \\ x_1^* &= \dfrac{2^3}{3^4} p^3 = \dfrac{8}{81} p^3 \end{cases}$$

Soit une firme concurrentielle produisant un seul modèle de téléphone à l'aide de matières premières (plastique, métaux rares) dont la technologie de production est donnée par la fonction suivante :

$$y = x_1^{1/4} x_2^{1/4}$$

et le prix des facteurs de production sont respectivement donnés par $w_1 = 1$ et $w_2 = 4$. On note $p$ le prix unitaire du bien produit.

Q 1) Déterminer la fonction de coût total de la firme

## Q 1) Déterminer la fonction de coût total de la firme

- Il faut d'abord trouver les demandes en facteurs de production, conditionnellement au niveau de production.
- Problème du producteur : trouver $x_1^*$ et $x_2^*$ tels que

$$(x_1^*, x_2^*) \in \underset{(x_1,x_2)}{\arg\min} \{1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2\}$$

$$\text{sous la contrainte : } y = x_1^{1/4} x_2^{1/4}$$

- $TMST_{2,1}(x_1, x_2) = \frac{\frac{1}{4} x_1^{-3/4} x_2^{1/4}}{\frac{1}{4} x_1^{1/4} x_2^{-3/4}} = \frac{x_2}{x_1}$
- Condition d'optimalité : $\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow x_1 = 4x_2$
- Contrainte : $y = x_1^{1/4} x_2^{1/4} \Longleftrightarrow y = (4x_2)^{1/4} x_2^{1/4} = 4^{1/4} x_2^{1/4} x_2^{1/4} = 2^{1/2} x_2^{1/2}$
  - On déduit $x_2^{1/2} = \frac{y}{2^{1/2}} \Longleftrightarrow x_2^* = \frac{y^2}{2}$. Donc $x_1^* = 4x_2^* = 2y^2$

Q 1) Déterminer la fonction de coût total de la firme

- Demande en facteurs : $x_1^* = 2y^2; \quad x_2^* = \frac{y^2}{2}$
- Coût total : $C(y) = 1 \cdot 2y^2 + 4 \cdot \frac{y^2}{2}$, soit $C(y) = 4y^2$
- On anticipe la suite de l'exercice en déterminant également :

Q 1) Déterminer la fonction de coût total de la firme

- Demande en facteurs : $x_1^* = 2y^2; \quad x_2^* = \dfrac{y^2}{2}$
- Coût total : $C(y) = 1 \cdot 2y^2 + 4 \cdot \frac{y^2}{2}$, soit $C(y) = 4y^2$
- On anticipe la suite de l'exercice en déterminant également :
  - Le coût moyen : $CM(y) = C(y)/y = 4y$

Q 1) Déterminer la fonction de coût total de la firme

- Demande en facteurs : $x_1^* = 2y^2; \quad x_2^* = \dfrac{y^2}{2}$
- Coût total : $C(y) = 1 \cdot 2y^2 + 4 \cdot \frac{y^2}{2}$, soit $C(y) = 4y^2$
- On anticipe la suite de l'exercice en déterminant également :
  - Le coût moyen : $CM(y) = C(y)/y = 4y$
  - Le coût marginal : $Cm(y) = \frac{\partial C(y)}{\partial y} = 8y$

## Q 2.a) Résolution du programme de maximisation du profit de la firme

- $\pi(y) = p \cdot y - C(y) = p \cdot y - 4y^2$

## Q 2.a) Résolution du programme de maximisation du profit de la firme

- $\pi(y) = p \cdot y - C(y) = p \cdot y - 4y^2$
- Le problème de la firme, c'est trouver $y^*$ tel que $\pi(y^*)$ soit maximal.

$$y^* \in \arg\max_{y} \{\pi(y) = py - 4y^2\}$$

## Q 2.a) Résolution du programme de maximisation du profit de la firme

- $\pi(y) = p \cdot y - C(y) = p \cdot y - 4y^2$
- Le problème de la firme, c'est trouver $y^*$ tel que $\pi(y^*)$ soit maximal.

$$y^* \in \arg\max_{y} \{\pi(y) = py - 4y^2\}$$

- Condition d'optimalité de premier ordre : $\pi^{'}(y) = 0 \Longleftrightarrow p - 8y = 0$

## Q 2.a) Résolution du programme de maximisation du profit de la firme

- $\pi(y) = p \cdot y - C(y) = p \cdot y - 4y^2$
- Le problème de la firme, c'est trouver $y^*$ tel que $\pi(y^*)$ soit maximal.

$$y^* \in \arg\max_{y} \{\pi(y) = py - 4y^2\}$$

- Condition d'optimalité de premier ordre : $\pi^{'}(y) = 0 \Longleftrightarrow p - 8y = 0$
  - Solution unique : $y^* = \frac{1}{8}p$

## Q 2.b) Fonction d'offre de long terme de la firme

- La fonction d'offre de **long terme** dépend du seuil de rentabilité
  - $CM(y) == 4y; \quad Cm(y) = 8y$
  - $CM(y) = Cm(y) \Longleftrightarrow 4y = 8y$, soit $y_r = 0$. Par suite, on a $p_r = Cm(0) = 0$
- On a la solution au probleme de maximisation du profit de la firme : $y^* = \frac{1}{8}p$

## Q 2.b) Fonction d'offre de long terme de la firme

- La fonction d'offre de **long terme** dépend du seuil de rentabilité
  - $CM(y) == 4y; \quad Cm(y) = 8y$
  - $CM(y) = Cm(y) \iff 4y = 8y$, soit $y_r = 0$. Par suite, on a $p_r = Cm(0) = 0$
- On a la solution au probleme de maximisation du profit de la firme : $y^* = \frac{1}{8}p$
- La fonction d'offre de **long terme** de la firme s'écrit alors :

$$y(p) = \begin{cases} \frac{1}{8}p & \text{si } p \geq p_r = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Q 3) Demande en facteurs de production, en fonction du prix

- Demande en facteurs de production : $\left(x_1^*(y) = 2y^2;\ x_2^*(y) = \frac{y^2}{2}\right)$
- Fonction d'offre

$$y(p) = \begin{cases} \frac{p}{8} & \text{si } p \geq p_r = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $x_1^* = 2y^2 = 2\left(\frac{p}{8}\right)^2 = 2 \cdot \frac{p^2}{64} = \frac{p^2}{32}$
- $x_2^* = \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p}{8}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{64} = \frac{p^2}{128}$
- Demande en facteurs en fonction du prix : $\left(x_1^*(p) = \frac{p^2}{32};\ x_2^*(p) = \frac{p^2}{128}\right)$

## Q 4) Obtention de la demande en facteurs de production par la maximisation du profit

- Ce problème équivalent à celui de la minimisation du coût sous contrainte de la technologie

$$(x_1^*, x_2^*) \in \underset{(x_1,x_2)}{\arg\max} \{py - 1 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2\}$$

$$\text{sous la contrainte : } y = x_1^{1/4} x_2^{1/4}$$

- $\iff (x_1^*, x_2^*) \in \arg\max_{(x_1,x_2)} \{p x_1^{1/4} x_2^{1/4} - 1 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2\}$
- On pose $g(x_1, x_2) = p x_1^{1/4} x_2^{1/4} - x_1 - 4x_2$
- Conditions d'optimalité de premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_1} & = 0 \\ \frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_2} & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{4} p x_1^{-3/4} x_2^{1/4} - 1 & = 0 \\ \frac{1}{4} p x_1^{1/4} x_2^{-3/4} - 4 & = 0 \end{cases}$$

## Q 4) Obtention de la demande en facteurs de production par la maximisation du profit (suite - 1)

$$\begin{cases} \frac{1}{4}px_1^{-3/4}x_2^{1/4} - 1 & = 0 \\ \frac{1}{4}px_1^{1/4}x_2^{-3/4} - 4 & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}px_1^{-3/4}x_2^{1/4} & = 1 \\ \frac{1}{4}px_1^{1/4}x_2^{-3/4} & = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} px_1^{-3/4}x_2^{1/4} & = 4 \\ px_1^{1/4}x_2^{-3/4} & = 16 \end{cases}$$

- On n'a pas intérêt à diviser les 2 équations

## Q 4) Obtention de la demande en facteurs de production par la maximisation du profit (suite - 1)

$$\begin{cases} \frac{1}{4}px_1^{-3/4}x_2^{1/4} - 1 & = 0 \\ \frac{1}{4}px_1^{1/4}x_2^{-3/4} - 4 & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}px_1^{-3/4}x_2^{1/4} & = 1 \\ \frac{1}{4}px_1^{1/4}x_2^{-3/4} & = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} px_1^{-3/4}x_2^{1/4} & = 4 \\ px_1^{1/4}x_2^{-3/4} & = 16 \end{cases}$$

- On n'a pas intérêt à diviser les 2 équations
  - Cela ferait disparaitre $p$. Or, on veut $x_1^*(p)$ et $x_2^*(p)$
- On peut multiplier les deux équations (cela conserve $p$) :

$$p^2 x_1^{-1/2} x_2^{-1/2} = 64 \Longleftrightarrow \frac{p^2}{x_1^{1/2} x_2^{1/2}} = 64$$

$$\Longleftrightarrow x_1^{1/2} = \frac{p^2}{64 x_2^{1/2}}, \quad \text{soit } x_1^{1/4} = \frac{p}{8 x_2^{1/4}}$$

## Q 4) Obtention de la demande en facteurs de production par la maximisation du profit (suite - 2)

- Rappel de la condition d'optimalité du problème

$$\begin{cases} px_1^{-3/4}x_2^{1/4} & = 4 \\ px_1^{1/4}x_2^{-3/4} & = 16 \end{cases}$$

- Rappel de la relation obtenue : $x_1^{1/4} = \frac{p}{8x_2^{1/4}}$

$$px_1^{1/4}x_2^{-3/4} = 16 \Longleftrightarrow p\left(\frac{p}{8x_2^{1/4}}\right)x_2^{-3/4} = 16$$

$$\Longleftrightarrow \frac{p^2}{8x_2} = 16, \quad \text{soit } x_2 = \frac{p^2}{8 \times 16} = \frac{p^2}{128}$$

## Q 4) Obtention de la demande en facteurs de production par la maximisation du profit (suite - 3)

- Rappel de la relation obtenue : $x_1^{1/4} = \frac{p}{8x_2^{1/4}}$
- Rappel de l'expression de $x_2$ : $x_2^* = \frac{p^2}{128}$
- On cherche maintenant $x_1^*$

$$x_1^{1/4} = \frac{p}{8x_2^{1/4}} \Longleftrightarrow x_1 = \frac{p^4}{8^4 x_2} = \frac{p^4}{8^4} \times x_2^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow x_1 = \frac{p^4}{8^4} \times \frac{128}{p^2} = \frac{p^2}{32}$$

- On a : $\left(x_1^*(p) = \frac{p^2}{32};\ x_2^*(p) = \frac{p^2}{128}\right)$